С.К. Савельев

**Моделирование. Лабораторный практикум.**

Санкт Петербург

2022

УДК

Савельев С.К.

Моделирование. Лабораторный практикум: практикум. Изд. 1-е / С.К. Савельев; Балт. гос. техн. ун-т. – СПб., 2022.

с.

Практикум содержит описания ряда лабораторных работ по курсу «Моделирование». Выполнение данного практикума позволит закрепить навыки использования методов стохастического моделирования для решения прикладных инженерных задач в области проектирования ракетной техники и вооружений. Кроме того в практикум вклечен ряд сведений из курса прикладной статистики, необходимых для решения указанных задач.

© Авторы, 2022

# Оглавление

[Оглавление 4](#_Toc92399863)

[Введение 9](#_Toc92399864)

[Работа № 1. Моделирование атаки самолетом наземной цели 10](#_Toc92399865)

[1. Модель 10](#_Toc92399866)

[2. Задание 10](#_Toc92399867)

[3. Содержание ЛР 11](#_Toc92399868)

[4. Содержание отчета 12](#_Toc92399869)

[5. Варианты индивидуальных заданий. 12](#_Toc92399870)

[6. Контрольные вопросы 14](#_Toc92399871)

[Работа № 3. Гарантированная дальность полета БР 14](#_Toc92399872)

[1. Модель 14](#_Toc92399873)

[2. Задание 17](#_Toc92399874)

[3. Содержание ЛР 17](#_Toc92399875)

[4. Содержание отчета. 18](#_Toc92399876)

[5. Варианты индивидуальных заданий. 18](#_Toc92399877)

[6. Контрольные вопросы 19](#_Toc92399878)

[Работа № 4. Моделирование косвенных измерений 20](#_Toc92399879)

[1. Модель 20](#_Toc92399880)

[2. Задание 22](#_Toc92399881)

[3. Содержание ЛР 22](#_Toc92399882)

[4. Содержание отчета. 23](#_Toc92399883)

[5. Варианты индивидуальных заданий. 24](#_Toc92399884)

[6. Контрольные вопросы 26](#_Toc92399885)

[~~Работа № 5. Моделирование системы массового обслуживания~~ 26](#_Toc92399886)

[~~1. Модель~~ 26](#_Toc92399887)

[~~2. Задание~~ 27](#_Toc92399888)

[~~3. Содержание ЛР~~ 27](#_Toc92399889)

[~~4. Содержание отчета~~ 27](#_Toc92399890)

[~~5. Варианты индивидуальных заданий~~ 28](#_Toc92399891)

[~~6. Контрольные вопросы~~ 29](#_Toc92399892)

[Работа № 6. Вычисление определенных интегралов методом Монте-Карло 29](#_Toc92399893)

[1. Модель. 29](#_Toc92399894)

[2. Задание 30](#_Toc92399895)

[3. Содержание работы 30](#_Toc92399896)

[4. Содержание отчета 30](#_Toc92399897)

[5. Варианты индивидуальных заданий 30](#_Toc92399898)

[6. Контрольные вопросы 32](#_Toc92399899)

[Работа № 8. Несущая способность деталей 33](#_Toc92399900)

[1. Модель. 33](#_Toc92399901)

[2. Задание 35](#_Toc92399902)

[4. Содержание ЛР 38](#_Toc92399903)

[5. Содержание отчета 39](#_Toc92399904)

[6. Контрольные вопросы 39](#_Toc92399905)

[Работа № 9. Моделирование ветровой и транспортной нагрузки 40](#_Toc92399906)

[1. Модель 40](#_Toc92399907)

[2. Задание 42](#_Toc92399908)

[3. Содержание ЛР 42](#_Toc92399909)

[4. Содержание отчета. 43](#_Toc92399910)

[5. Варианты индивидуальных заданий. 43](#_Toc92399911)

[6. Контрольные вопросы 44](#_Toc92399912)

[~~Работа № 10. Моделирование полета крылатой ракеты в турбулентной атмосфере~~ 45](#_Toc92399913)

[~~Модель~~ 45](#_Toc92399914)

[~~2. Задание~~ 48](#_Toc92399915)

[~~3. Содержание ЛР~~ 48](#_Toc92399916)

[~~4. Содержание отчета.~~ 48](#_Toc92399917)

[~~5. Варианты индивидуальных заданий~~ 48](#_Toc92399918)

[~~6. Контрольные вопросы~~ 49](#_Toc92399919)

[~~Работа № 11. Моделирование полета крылатой ракеты на малой высоте~~ 49](#_Toc92399920)

[~~1. Модель~~ 49](#_Toc92399921)

[~~2. Задание~~ 50](#_Toc92399922)

[~~3. Содержание ЛР~~ 50](#_Toc92399923)

[~~4. Содержание отчета~~ 50](#_Toc92399924)

[~~4.~~ ~~Варианты индивидуальных заданий~~ 50](#_Toc92399925)

[~~6. Контрольные вопросы~~ 51](#_Toc92399926)

[Л.р. … Одномерная линейная регрессия первого порядка. 52](#_Toc92399927)

[Порядок выполнения расчетов и оформления отчета по лабораторной работе. 53](#_Toc92399928)

[Наборы данных для Л.р. 1. 54](#_Toc92399929)

[Многофакторная линейная регрессия 58](#_Toc92399930)

[Порядок выполнения расчетов и оформления отчета по лабораторной работе. 58](#_Toc92399931)

[Метод всех возможных регрессий 58](#_Toc92399932)

[Метод пошагового анализа 61](#_Toc92399933)

[Отчет по лабораторной работе должен содержать: 64](#_Toc92399934)

[Дополнения 68](#_Toc92399935)

[Критерий Колмогорова. 68](#_Toc92399936)

[Проверка гипотез о законе распределения. Критерий соответствия (согласия) χ2 69](#_Toc92399937)

# 

# Введение

Курс, в основном, посвящен комплексу вопросов, относящихся к моделированию стохастических объектов, а именно, случайных событий, случайных величин, случайных векторов и процессов.

Практикум по курсу «Моделирование» должен закрепить знания студентов, полученные на лекционных занятиях, привить им навыки самостоятельного решения разнообразных задач с использованием стохастических методов, ознакомить с постановкой и особенностями решения ряда важных задач возникающих в практике проектирования ракетных систем.

# Работа № 1. Моделирование атаки самолетом наземной цели

## 1. Модель

Самолет атакует наземную цель. Самолет вооружен *mr* ракетами класса воздух – земля. Самолет открывает огонь, как только цель оказывается на расстоянии *L* от цели (размер зоны пусков) и запускает ракеты одну за другой с постоянным интервалом Δ. Средняя скорость полета ракеты и вероятность поражения цели аппроксимированы линейными зависимостями в функции расстояния *l* от точки пуска до цели. Результат пуска каждой ракеты определяется жеребьевкой. Цель оказывает противодействие (обстреливает) самолету. Вероятность успешного противодействия (уничтожения самолета) так же аппроксимирована линейной зависимостью от расстояния. Успех противодействия определяется жеребьевкой. Ниже приведены использованные аппроксимации.

Для скорости полета ракеты: 

Для вероятности поражения ракетой воздух-земля цели: 

Для вероятности противодействия (уничтожения самолета): 

Все три зависимости справедливы только при 0 < *l* *< L*. Вне этого интервала функции равны нулю.

## 2. Задание

Методом имитационного моделирования произвести оценку боевой эффективности ракетного вооружения самолета. Исследовать зависимость эффективности вооружения от его характеристик и противодействия противника (по заданию руководителя).

В число показателей эффективности входят:

* вероятность победы самолета в бою,
* средний расход ракет в успешном бою,
* средний расход ракет в любом бою.

Характеристиками вооружения являются:

* Максимальная дальность пуска *L*;
* Интервал пуска ракет Δ;
* Число ракет на самолете *mr*;
* Скорость полета самолета *V*;
* Параметры линейных аппроксимаций вероятности уничтожения цели одной ракетой, вероятности противодействия противника и средней скорости полета ракеты.

## 3. Содержание ЛР

1) Назначить, ориентируясь на прототипы, характеристики вооружения:

* скорость полета самолета (*V* < 300 м/с);
* максимальная дальность пуска АУР (*L* <= 10000 м);
* временные интервалы между пусками ракет (Δ=1...10 с);
* число АУР (*mr* < *L*/(*V\*Δ*)+1).

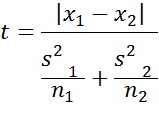
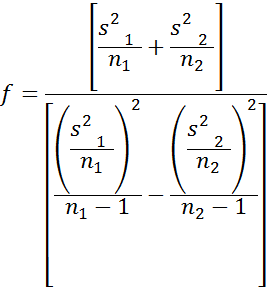
2) Составить план численного эксперимента (число прогонов модели), исходя из требуемой точности, и алгоритм реализации плана. При этом следует исходить из того, что средняя квадратичная погрешность *σp* оценки вероятности события зависит от вероятности события *p* и числа прогонов модели:



3) Дополнить и отладить программу для компьютера. Выполнить моделирование.

4) Произвести анализ изменения оценки вероятности победы самолета при варьировании одного из параметров модели. Определить дает ли варьирование параметра значимое изменение оценки вероятности победы самолета.

Сопоставление значений можно производить с использованием t распределения.



4) Составить отчет по ЛР.

## 4. Содержание отчета

1. Постановка задачи (Конкретное задание выдается преподавателем). Анализ влияния изменения одного из параметров модели на вероятность победы в бою.
2. Метод решения. План имитационного эксперимента- Выбор объема вычислений в зависимости от принятой точности расчета.
3. Результаты моделирования. Статистический анализ результатов (Оценка точности результатов, построение доверительных интервалов).
4. Графики вероятности победы самолета в зависимости от заданного параметра с определением доверительного интервала для рассчитанных точечных оценок вероятности победы, анализ, выводы.
5. Дать обоснованный ответ на вопрос: «Приводит ли изменение варьируемого параметра к значимому изменению вероятности победы?»

## 5. Варианты индивидуальных заданий.

Варианты индивидуальных заданий на лабораторную работу приведены в табл. 1, а в табл.2 приведены характеристики рекомендованных ракет.

Таблица 1

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | Ракета | Варьируемый фактор |
| 1 | Х-23 | Максимальная дальность пуска |
| 2 | Х-23 | Интервал пуска ракет |
| 3 | Х-23 | Число ракет на самолете |
| 4 | Х-23 | Скорость полета самолета |
| 5 | Х-25МР | Максимальная дальность пуска |
| 6 | Х-25МР | Интервал пуска ракет |
| 7 | Х-25МР | Число ракет на самолете |
| 8 | Х-25МР | Скорость полета самолета |
| 9 | Х-66 | Максимальная дальность пуска |
| 10 | Х-66 | Интервал пуска ракет |
| 11 | Х-66 | Число ракет на самолете |
| 12 | Х-66 | Скорость полета самолета |
|  |  |  |

*Таблица 2*

Данные некоторых авиационных ракет

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Тип | Дальность *L*, км | Полетное число *М* | Стартовая масса, кг |
| Х-23 | 10 | 1 | 278 |
| Х-25МР | 8 | 2,5 | 320 |
| Х-66 | 8 | 1 | 278 |

## 6. Контрольные вопросы

1. Базовая случайная величина.
2. Единичный жребий.
3. Эксперимент по схеме Бернулли.
4. Точечная и интервальная оценка вероятности случайного события.
5. Центральные теоремы теории вероятностей

# Работа № 2. Гарантированная дальность полета БР

## 1. Модель

Рассматривается простейшая стохастическая модель жидкостной одноступенчатой баллистической ракеты (БР). Считается, что случайный характер дальности полета ракеты вызван погрешностями заправки ракеты топливными компонентами и погрешностями настройки турбонасосного агрегата на режим. Таким образом случайны:

* Масса окислителя;
* Масса горючего;
* Массовый расход топлива в камеру сгорания;
* Расходное соотношение топливных компонентов;

Кроме того случайны «сухая» масса и удельный импульс тяги.

Случайный характер перечисленных физических величин обусловлен погрешностями измерительных приборов. Обычная точность технических измерительных приборов соответствует классам точности 0,5 или 1. По значению класса точности умноженному на измеряемую величину определяется ошибка (в 3σ) определения величины. Принимается, что погрешности распределены по нормальному закону.

В результате ошибок заправки, изготовления и функционирования узлов ракеты заправочное и расходное соотношения компонентов не совпадают, и один из топливных компонентов в полете заканчивается раньше другого.

Гарантированной дальностью полета БР называется максимальная дальность, которая может быть достигнута ракетой с заданной вероятностью, при условии выключения двигателя по команде системы управления, а не из-за недостатка одного из компонентов.

Реализации случайных значений топливных запасов *W*ok и *W*Г, суммарного расхода топлива *R* и расходного соотношения компонентов *Km* определяются жеребьевкой с использованием программных генераторов нормально распределенных случайных величин. На основе этих значений определяются

* Расход горючего ;
* Расход окислителя ;
* Времена расходования компонентов ;
* Максимальная продолжительность работы двигателя ;
* Израсходованное количество топлива и его относительная величина ;
* Скорость полета в конце активного участка (по формуле К. Э. Циолковского с поправочным коэффициентом, учитывающим потери скорости) 
* Дальность полета по приближенной формуле , где дальность определяется в километрах, а скорость в конце активного участка траектории в м/с.

Для реализации приведенного алгоритма необходимо задать математические ожидания и средние квадратичные погрешности случайных величин:

* топливных запасов *W*ok и *W*Г,
* суммарного расхода топлива *R*,
* расходного соотношения: компонентов окислитель/горючее *Km* а также
* массы конструкции ракеты *Mk* и удельного импульса тяги двигателя *Iud*.

В программе рекомендуется использовать следующие встроенные функции MathCad’а:

rnd, rnorm, dnorm, qnorm, pnorm, mean, min, max, sort, hist, ln.

## 2. Задание

Методом имитационного моделирования произвести оценку гарантированной дальности полета БР. Исследовать зависимость гарантированной дальности от точности заправки или настройки ракеты (по заданию руководителя). Сравнить результаты с результатами, полученными другими студентами по аналогичным заданиям, но иными требованиями к точности.

## 3. Содержание ЛР

1. Назначить, ориентируясь на прототипы (например, 8К61 и др.), характеристики БР.
2. Составить план имитационного эксперимента, исходя из потребной точности результата, ориентируясь на формулы для среднего арифметического *x*ср, среднего квадратичного отклонения *s*, средней квадратичной погрешности среднего арифметического *sx*ср, дисперсии средней квадратичной погрешности среднего арифметического *ss*2.



1. Дополнить (составить) и отладить компьютерную программу.
2. Выполнить численный эксперимент.
3. Построить эмпирическую функцию распределения дальности. При построении доверительного коридора следует использовать предельное распределение Колмогорова (см. лекции).
4. Обработать результаты, сформулировать выводы и составить отчет по работе.

## 4. Содержание отчета.

1. Постановка задачи (Конкретное задание выдается преподавателем).
2. Метод решения (План имитационного эксперимента).
3. Результаты моделирования. Статистический анализ результатов (Оценка точности результатов, гистограммы дальности, эмпирическая функция распределения дальности полета, доверительный коридор функции распределения, зависимость гарантированной дальности от варьируемой переменной).
4. Графики, анализ, выводы.

## 5. Варианты индивидуальных заданий.

Варианты индивидуальных заданий на лабораторную работу приведены в табл. 3.

Таблица 3

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | Варьируемая переменная | Точность остальных  переменных |
| 1 | Точность заправки бака окислителя | высокая |
| 2 | Точность заправки бака горючего | высокая |
| 3 | Точность настройки ТНА на суммарный расход | высокая |
| 4 | Точность настройки ТНА на соотношение компонентов | высокая |
| 5 | Точность заправки бака окислителя | средняя |
| 6 | Точность заправки бака горючего | средняя |
| 7 | Точность настройки ТНА на суммарный расход | средняя |
| 8 | Точность настройки ТНА на соотношение компонентов | средняя |
| 9 | Точность заправки бака окислителя | низкая |
| 10 | Точность заправки бака горючего | низкая |
| 11 | Точность настройки ТНА на суммарный расход | низкая |
| 12 | Точность настройки ТНА на соотношение компонентов | низкая |

## 6. Контрольные вопросы

1. Базовая случайная величина.
2. Жеребьевка значений случайных величин.
3. Метод обращения функции распределения.
4. Нелинейное преобразование закона распределения.
5. Центральные теоремы теории вероятностей.

# Работа № 3. Моделирование косвенных измерений

## 1. Модель

Измерение физической величины – это не только оценка ее числового значения, но и определение точности полученной оценки. Результат измерения обычно представляется в виде доверительного интервала, накрывающего истинное значение измеряемой величины с заданной вероятностью. В метрологии различают прямые, косвенные, совместные и совокупные измерения. Эти виды измерений отличаются друг от друга методами их статистической обработки.

Уравнение косвенных измерений физической величины *y* имеет вид *y = φ(x1,x2,…xm)*. В этом уравнении непосредственно в опыте измеряются прямо или косвенно аргументы *xj , j = 1…m*, искомая же величина *y* находится путем вычислений. Например, косвенно измеряется электрическая мощность *W* по разности потенциалов *U* и току *I* или сопротивлению *R.*

Для построения доверительного интервала необходим закон распределения вероятностей результата измерения *Y*. Если распределения погрешностей аргументов уравнения косвенного измерения известны, а сами погрешности независимы, то функция распределения случайной величины Y определяется *m* – кратным интегралом



где область интегрирования Ω определяется неравенством *φ(x1,x2,…xm) < y*.

Практически воспользоваться приведенным соотношением удается крайне редко из-за непреодолимых математических сложностей. С другой стороны закон распределения можно установить методом имитационного моделирования.

Соответствие выборочных данных, содержащихся в массиве *Y*, некоторому теоретическому распределению проверяется при помощи критериев Пирсона или Колмогорова-Смирнова. Рассмотрим вкратце второй критерий. Прежде всего, высказываются гипотеза H0 о том, что различие между эмпирической Fэ(*y*) и теоретической Fт(*y*) функциями распределения вызвано только случайными причинами. Высказывается и альтернативная гипотеза H1. Затем выборочные данные перестраиваются в вариационный ряд, то есть в упорядоченный в порядке возрастания ряд значений *Y*:



и строится эмпирическая функция распределения



Расстояние Колмогорова между эмпирической и теоретической функциями распределения равно

*D*=max[Fэ(*y*)-Fт,(*y*)].

Если верна гипотеза Н0 и *п* > 20, то случайная величина √(n)D имеет распределение Колмогорова.



Вероятности *β*, уровни значимости *α* = 1 – *β* и соответствующие критические значения *z*кр, приведены ниже.

*β*  0.995 0.99 0.975 0.95 0.90 0.85 0.8 0.75

*α*  0.005 0.01 0.025 0.05 0.10 0.15 0.20 0.25

*z*кр 1.73 1.63 1.48 1.36 1.22 1.14 1.07 1.02

Решающее правило критерия Колмогорова таково. Принимается гипотеза:



Если распределение Y Fт(*l*) неизвестно, то следует построить эмпирическую функцию распределения. Такая оценка функции распределения является состоятельной и несмещенной. Доверительный интервал (точнее коридор) для функции распределения строится с использованием распределения Колмогорова, а именно с вероятностью *β* справедливы неравенства



где Δ = zкр из приведенной выше таблицы.

## 2. Задание

Методом имитационного моделирования исследовать точность косвенного измерения (по заданию руководителя).

## 3. Содержание ЛР

1. Сформировать уравнение косвенного измерения;
2. Задаться классами точности измерительных приборов, которые могут быть использованы для прямых измерений аргументов уравнения косвенного измерения;
3. Задаться математическими ожиданиями и средними квадратичными погрешностями прямых измерений;
4. Смоделировать большую (*n* > 100)выборку результатов косвенных измерений;
5. Построить гистограмму и эмпирическую функцию распределения по данным моделирования;
6. Построить доверительный коридор для функции распределения;
7. Проверить гипотезу о нормальном характере распределения генеральной совокупности, используя критерий Пирсона (см. Приложение);
8. Выполнить точечное и интервальное оценивание измеряемой величины по результатам большой выборки;
9. Сгенерировать малую выборку (*n ≈ 5*). Выполнить точечное и интервальное оценивание измеряемой величины по результатам малой выборки;
10. Составить отчет по результатам работы.

## 4. Содержание отчета.

1. Постановка задачи (Конкретное задание выдается преподавателем).
2. Метод решения (План имитационного эксперимента).
3. Результаты моделирования. Статистический анализ результатов (Оценка точности результатов, гистограмма, эмпирическая функция распределения, доверительные интервалы).
4. Проверка гипотезы о нормальном распределении.
5. Графики, анализ, выводы.

## 5. Варианты индивидуальных заданий.

Варианты индивидуальных заданий на лабораторную работу приведены в табл. 4.

Таблица 4

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № | Измеряемая величина | Уравнение измерения | Примечание |
| 1 | Число Рейнольдса |  | ПКР. Аэродинамическая труба |
| 2 | Число Рейнольдса |  | Торпеда. Опытовый бассейн. |
| 3 | Число Маха |  | ПКР. Аэродинамическая труба |
| 4 | Скоростной напор |  | ПКР. Аэродинамическая труба |
| 5 | Скоростной напор |  | Торпеда. Опытовый бассейн. |
| 6 | Коэффициент силы лобового  сопротивления |  | ПКР. Аэродинамическая труба |
| 7 | Коэффициент силы лобового  Сопротивления |  | Торпеда. Опытовый бассейн. |
| 8 | Производная коэффициента подъемной силы |  | ПКР. Аэродинамическая труба |
| 9 | Электрическая мощность |  |  |
| 10 | Напряжение при изгибе |  |  |

Примечание.

1. Зависимость плотности и кинематической вязкости воздуха от высотыпредставлены в табл.5.

Таблица 5

Изменение параметров воздуха с высотой.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Высота, м | Плотность, кг/м3 | Вязкость, м2/с |
| 0 | 1.25 | 1.46\*10-5 |
| 2000 | 1.03 | 1.71\*10-5 |
| 4000 | 0.836 | 2.03\*10-5 |
| 6000 | 0.673 | 2.41\*10-5 |
| 8000 | 0.536 | 2.90\*10-5 |
| 10000 | 0.422 | 3.52\*10-5 |

1. Плотность *ρ* и кинематическая вязкость *υ* воды. *ρ =* 1 кг/м3;  *υ =* 10-6 м2/с.

## 6. Контрольные вопросы

1. Базовая случайная величина.
2. Жеребьевка значений случайных величин.
3. Генератор нормального распределения.
4. Особенность математической обработки косвенных измерений.
5. Точечная и интервальная оценки косвенных измерений.
6. Критерий Пирсона.
7. Центральная предельная теорема. Её использование в лабораторной работе.

# ~~Работа № 5. Моделирование системы массового обслуживания~~

## ~~1. Модель~~

~~Системой массового обслуживания (СМО) называется система, предназначенная для обслуживания заявок (требований), поступающих в систему в случайные моменты времени. Время, требующееся для удовлетворения заявок также случайно. Теория СМО рассматривает математические модели, оперирующие временными ресурсами систем, которые затрачиваются системами при выполнении предписанных им функций.~~

~~СМО имеет дело с двумя случайными потоками событий: потоком заявок на входе и потоком обработанных заявок на выходе.~~

~~Потоком событий называется последовательность однородных событий, следующих одно за другим в случайные моменты времени. Примеры: поток вызовов на АТС; поток отказов технической системы; поток самолетов, атакующих охраняемый объект; поток забитых шайб при игре в хоккей и др.~~

~~Поток событий называется простейшим, если он стационарен, ординарен и не имеет последействия. Вероятность того, что случайное число событий, которое может произойти за время~~ *~~t~~*~~, распределено по закону Пуассона. Промежутки времени между соседними событиями имеют экспоненциальный закон распределения.~~

~~К основным характеристикам СМО относятся:~~

*~~k~~* ~~- число каналов обслуживания;~~

*~~l~~* ~~- число мест в очереди;~~

*~~λ~~*~~- интенсивность потока заявок;~~

*~~μ~~* ~~- производительность одного канала СМО.~~

~~Для оценки эффективности работы СМО используют следующие показатели:~~

*~~A~~* ~~- абсолютная пропускная способность;~~

*~~Q = A/ λ~~* ~~- относительная пропускная способность, иначе, вероятность обслуживания заявки;~~

*~~P~~*~~отк = 1 -~~ *~~Q~~* ~~- вероятность отказа в обслуживании;~~

*~~z~~*~~ср~~ ~~- среднее число заявок, находящихся в системе;~~

*~~k~~*~~ср~~ ~~- среднее число занятых каналов;~~

*~~l~~*~~ср~~ ~~- средняя длина очереди;~~

*~~τ~~*~~c~~~~- среднее время пребывания заявки в системе;~~

*~~τ~~*~~ож~~ ~~- среднее время ожидания в очереди;~~

*~~τ~~*~~об~~ ~~- среднее время обслуживания заявок.~~

~~Все усредненные характеристики относятся ко всем заявкам в том числе и тем, которые не были обслужены или даже не поставлены в очередь.~~

~~Если на графе состояний системы все состояния вытянуты в одну линию, причем каждое из них, кроме крайних, связано прямой и обратной связью с двумя соседними, то такая схема называется схемой гибели и размножения.~~

~~Финальные вероятности, то есть вероятности состояний системы в стационарном режиме определяются формулами:~~

~~~~

~~~~

~~~~

~~Связи между средними количественными и средними временными характеристиками устанавливаются формулами Литтла: ~~

## ~~2. Задание~~

~~Оценить показатели эффективности работы системы массового обслуживания (СМО) используя соотношения теории СМО.~~

## ~~3. Содержание ЛР~~

1. ~~Составить граф состояний системы;~~
2. ~~Составить и отладить компьютерную программу;~~
3. ~~Рассчитать финальные вероятности состояний системы;~~
4. ~~Исследовать влияние на показатели эффективности СМО одной из характеристик (по согласованию с руководителем).~~

## ~~4. Содержание отчета~~

1. ~~Постановка задачи (Конкретное задание выдается преподавателем).~~
2. ~~Метод решения (Основные положения математической модели СМО).~~
3. ~~Текст компьютерной программы и результаты расчета.~~
4. ~~Граф состояний системы.~~
5. ~~Анализ результатов и общие выводы по работе.~~

## ~~5. Варианты индивидуальных заданий~~

~~Ниже проведены тексты 12 задач, заимствованные из книги Е.С. Вентцель и Л.А. Овчарова «Теория вероятности». Для удобства использования первоисточника, содержащего пояснения и решения некоторых задач, сохранена нумерация задач. Сложность задач возрастает с увеличением их номера.~~

~~1 (11.2.) Одноканальная СМО с отказами представляет собой одну телефонную линию, на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью 0,4 вызов/мин. Средняя продолжительность разговора 3 мин. Время разговора имеет показательное распределение.~~

~~Найти финальные вероятности состояний системы и показатели эффективности ее работы.~~

~~2 (1.5.) Железнодорожная сортировочная горка, на которую подается простейший поток составов с интенсивностью 2 состава в час, представляет собой одноканальную СМО с неограниченной очередью. Время обслуживание (роспуска) состава на горке имеет показательное распределение со средним значением 20 мин.~~

~~Найти финальные вероятности состояний системы и показатели эффективности ее работы.~~

~~3 (11.6.) Условия задачи 11.5 усложняются тем, что в парке прибытия железнодорожной сортировочной горки могут находиться одновременно не более трех составов (включая обслуживаемый). Если состав прибывает в момент, когда в парке прибытия уже находятся три состава, он вынужден ожидать своей очереди на внешних путях. За один час пребывания состава на внешних путях станция платит штраф~~ *~~a~~* ~~руб.~~

~~Определить величину среднего суточного штрафа.~~

~~4 (11.9.) Автозаправочная станция (АЗС) имеет две колонки; площадка возле нее допускает одновременное ожидание не более четырех автомашин. Поток автомашин, прибывающих на АЗС, простейший с интенсивностью 1 машина/мин. Время обслуживания автомашины - показательное со средним значением 2 мин.~~

~~Найти финальные вероятности состояний АЗС и показатели эффективности ее работы.~~

~~5 (11.10.) Имеется двухканальная простейшая СМО с отказами. На ее вход поступает поток заявок с интенсивностью 4 заявки/час. Среднее время обслуживания одной заявки 0,8 ч. Каждая обслуженная заявка приносит доход 4 руб. Содержание каждого канала обходится в 2 руб./час. Решить выгодно ли увеличивать число каналов до 3?~~

~~5 (11.15.) В зубоврачебном кабинете 3 кресла, а в коридоре имеется 3 стула для ожидания приема. Поток клиентов - простейший с интенсивностью 12 клиента/час. Время обслуживания (приема клиента) - показательное со средним значением 20 мин. Если все три стула в коридоре заняты, клиент в очередь не становится.~~

~~Определить показатели эффективности работы кабинета.~~

~~7 (11.19.) Система массового обслуживания - билетная касса с одним окошком и неограниченной очередью. Касса продает билеты в пункты А и В; пассажиров, желающих купить билет в пункт А, приходит в среднем трое за 20 мин, в пункт В - двое за 20 мин. Поток пассажиров можно считать простейшим. Кассир в среднем обслуживает трех пассажиров за 10 мин. Время обслуживания - показательное. Установить, существуют ли финальные вероятности и если да - вычислить три первые из них.~~

~~Найти характеристики эффективности СМО.~~

~~8 (11.22.) Техническое устройство (ТУ) может время от времени выходить из, строя (отказывать). Поток отказов ТУ - простейший с интенсивностью 1,6 отказа в сутки. Время восстановления (ремонта) ТУ имеет равномерное распределение на участке от 0 до 1 суток.~~

~~Найти (для предельного стационарного режима) среднюю долю времени, в течении которого ТУ работает.~~

~~9 (11.27.) Железнодорожная касса имеет два окошка, в каждом из которых продаются билеты в два пункта: Москву и Сочи. Потоки пассажиров, приобретающих билеты в Москву и Сочи одинаковы по интенсивности, которая равна 0,45 пасс./мин. Среднее время обслуживания пассажира (продажи ему билета) 2 мин.~~

~~Поступило рационализаторское предложение: для уменьшения очередей сделать кассы специализированными: в первой продавать билеты только в Москву, а во второй - только в Сочи. Считая все потоки простейшими, проверить разумность этого предложения.~~

~~10(11.29.) Рассматривается простейшая двухканальная СМО с "нетерпеливыми" за явками. Интенсивность потока заявок - 3 заявки/ч; среднее время обслуживания одной заявки - 1 ч; средний срок, в течение которого заявка "терпеливо" стоит в очереди, равен 0,5 ч. Подсчитать финальные вероятности состояний, ограничиваясь теми, которые не меньше 0,001. Найти характеристики эффективности СМО.~~

~~11 (11.30.) Имеется n-канальная СМО с неограниченной очередью. На ее вход поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ; время обслуживания - показательное с параметром μ. Обслуживание происходит без гарантии качества: с вероятностью~~ *~~P~~* ~~оно удовлетворяет заявку, а с вероятностью (1-~~*~~P~~*~~) - не удовлетворяет. Во втором случае заявка обращается в СМО снова и либо сразу обслуживается, если нет очереди, либо становится в очередь, если она есть. Найти показатели эффективности СМО.~~

~~Значения величин~~ *~~n, λ~~*~~, μ и~~ *~~P~~* ~~задать самостоятельно.~~

~~12 (11.36.) Имеется простейшая трехканальная СМО с отказами; на нее поступает поток заявок с интенсивностью 4 заявки/мин. Время обслуживания заявки одним каналом 0,5 мин. Спрашивается, выгодно ли с точки зрения пропускной способности СМО заставить все три канала обслуживать заявки сразу, причем среднее время обслуживания уменьшается втрое? Как это скажется на среднем времени пребывания заявки в СМО?~~

## ~~6. Контрольные вопросы~~

1. ~~Определения случайного потока событий и системы массового обслуживания.~~
2. ~~Свойства простейшего потока событий.~~
3. ~~Распределения вероятностей, присущие простейшему потоку событий.~~
4. ~~Схема гибели и размножения.~~
5. ~~Формулы Литтла.~~
6. ~~Показатели эффективности работы СМО.~~

# Работа № 4. Вычисление определенных интегралов методом Монте-Карло

## 1. Модель.

В лабораторной работе требуется вычислить интеграл

 где - заданные кусочно-непрерывные функции. Функция *р*(*х*), называемая весовой, удовлетворяет условиям

 т.е. она неотрицательна и несобственный интеграл сходится.

## 2. Задание

Вычислить определенный интеграл



где функция *p*(*x*) и константы приведены ниже в таблице индивидуальных заданий.

Описание вычисления интеграла методом Монте-Карло можно найти, например, в учебном пособии С.К. Савельев Моделирование.

Интервал интегрирования студент назначает самостоятельно

## 3. Содержание работы

Вычислить интеграл, произвести оценку точности результата.

Установить зависимость трудоёмкости от точности результата.

## 4. Содержание отчета

1. Описание алгоритма вычислений;
2. Описание генератора случайных величин;
3. Выводы по работе.

## 5. Варианты индивидуальных заданий

a и b - параметры функции p(x).

Интегрировать следует по области определения функции p(x)

Варианты индивидуальных заданий на лабораторную работу приведены в табл. 6.

Таблица 6

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| №  варианта | α | Весовая функция | | |
| a | b | p(x) |
| 1 | 1.5 | 1.0 | 1.3 |  |
| 2 | 0.5 | 0.0 | 1.5 |
| 3 | 1.2 | 1.0 | 1.0 |
|  | 0.5 | 0.0 | 2.0 |
|  | 0.55 | -1.0 | 1.5 |
|  | 2.0 | 2.0 | 1.0 |
| 4 | 1.2 | 1.5 | ∞ |  |
| 5 | 2.0 | 1.0 | ∞ |
| 6 | 3.5 | 2.0 | ∞ |
|  | 2.5 | 1.5 | ∞ |
|  | 0.8 | 2.4 | ∞ |
|  | 3.5 | 1.3 | ∞ |
| 7 | 1.5 | 2.5 | ∞ |  |
| 8 | 1.2 | 1.5 | ∞ |
| 9 | 2.6 | 2.0 | ∞ |
|  | 2.5 | 1.0 | ∞ |
|  | 0.8 | 0.5 | ∞ |
|  | 0.5 | 1.9 | ∞ |
| 10 | 1.3 | 1.0 | 0.5 |  |
| 11 | 0.8 | 1.5 | 0.75 |
| 12 | 2.1 | 2.0 | 0.5 |
|  | 1.5 | 1.8 | 0.4 |
|  | 1.8 | 2.5 | 0.25 |
|  | 0.5 | 3.0 | 0.5 |
| 13 | 1.6 | 1.0 | 2.2 |  |
| 14 | 2.0 | 2.0 | 3.6 |
| 15 | 2.5 | 1.5 | 4.0 |
|  | 0.8 | 1.2 | 1.8 |
|  | 0.5 | 0.8 | 3.0 |

## 6. Контрольные вопросы

1. Методы моделирования случайных величин.
2. Метод обращения функции распределения.
3. Моделирование нормального распределения.
4. Математическое ожидание функции случайного аргумента.
5. Доверительная вероятность и доверительный интервал.

# Работа № 5. Несущая способность деталей

## 1. Модель.

Расчетные формулы приведены в таблицах 1, 2, 3. В формулах приняты следующие обозначения:

*a* - радиус средней окружности тора, м;

*E* - модуль упругости, Н/м2;

*h* - высота эллиптического днища, м;

*k* - коэффициент;

*l* - длина, м;

*p* - давление, Н/м2;

*R* - радиус, м;

*R0*- меньший радиус конической оболочки, м;

*R1*- больший радиус конической оболочки, м;

σ*b* - временное сопротивление, Н/м2;

*t* - толщина, м;

*T* - сила, Н;

*T*кр - критическая величина силы, Н;

*u* - полуугол при вершине конуса, рад.

Варианты индивидуальных заданий на выбор расчетной формулы приведены в табл. 7, 8, 9.

Таблица 7

Варианты задания для случая: Нагрузка - внутреннее давление, Характер разрушения - потеря прочности

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | Деталь | Разрушающая нагрузка |
| 1 | Шар - баллон | *p=(2σbt)/R* |
| 2 | Цилиндрическая оболочка | *p=(σbt)/R* |
| 3 | Коническая оболочка | *p=(σbtCOSu)/R* |
| 4 | Эллиптическое днище (*h*<*R*) | *p=(2σbth)/R2* |
| 5 | Торовый баллон (*a*>2*R*) | *p=2σbt/R(a/R-1)/(2a/R-1)* |

Таблица 8

Варианты задания для случая: Нагрузка - внешнее давление

Характер разрушения - потеря устойчивости

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | Деталь | Разрушающая нагрузка |
| 6 | Цилиндрическая оболочка | *p=0.92ER/l\**(*t/R*)*2.5* |
| 7 | Коническая оболочка | *p=kER1/l\**(*t/R1*)*2.5 COS1.5*(*u*)  *k=3.1-2.47R0/R1 при R0/R1<0.6*  *k=2.7-1.74R0/R1 при R0/R1>0.6* |
| 8 | Эллиптическое днище | *p=0.3E*(*t\*h/R2*)*2* |
| 9 | Туннельная труба | *p=0.275E*(*t/R*)*3* |

Таблица 9

Варианты задания для случая: Нагрузка - осевая сжимающая сила

Характер разрушения - потеря устойчивости

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Деталь | | | Разрушающая нагрузка |
| 10 | Цилиндрическая оболочка | | | *Т*кр=(0.15...0.3)\*2 *π E t2* |
|  | Полка стрингера или лонжерона | | | *Т*кр=*k E t3*/*l* |
|  | *Способ закрепления стрингера* | | |
|  | *слева* | *справа* | *k* |
| 11 | *жесткое* | *жесткое* | *6.3* |
| 12 | *жесткое* | *шарнирное* | *4.9* |
| 13 | *шарнирное* | *шарнирное* | *3.6* |
| 14 | *жесткое* | *нет* | *1.16* |

## 2. Задание

Сравнить результаты стохастического и детерминированного расчетов несущей способности типовой детали (по заданию преподавателя).

**Механические характеристики** проката приведены в таблицах 10, 11, 12 и 13. В таблицах использованы обозначения:

M - символ математического ожидания;

S - символ среднего квадратичного отклонения;

*Е* - модуль упругости, H/м2;

σb - временное сопротивление, H/м2;

σ02 - предел пропорциональности, H/м2;

*t* - толщина, мм.

Таблица 10

Характеристики листов из сплава Д16. (значения *σb* и *σ02* следует умножать на 1.E7)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *t*,  мм | M*t*,  мм | S*t*,  мм | M*σb*,  Н/м2 | S*σb*,  Н/м2 | M*σ02*,  Н/м2 | S*σ02*,  Н/м2 | Номинальные  *σb σ02* | |
| 1.0 | 0.992 | 0.038 | 43.61 | 1.05 | 27.63 | 0.94 | 34.0 | 22.0 |
| 1.2 | 1.118 | 0.031 | 43.62 | 1.13 | 27.50 | 0.76 | то же | то же |
| 1.5 | 1.394 | 0.041 | 43.50 | 1.12 | 27.50 | 0.86 | " | " |
| 1.8 | 1.710 | 0.036 | 42.68 | 0.81 | 27.17 | 0.73 | " | " |
| 2.0 | 1.905 | 0.041 | 42.86 | 1.11 | 27.64 | 0.91 | " | " |
| 2.5 | 2.374 | 0.032 | 43.02 | 0.88 | 27.95 | 0.87 | " | " |
| 3.0 | 2.885 | 0.036 | 44.27 | 1.10 | 29.16 | 0.95 | " | " |
| 4.0 | 3.904 | 0.039 | 45.55 | 1.17 | 30.18 | 1.12 | " | " |

Таблица 11

Листы из стали Х18Н10Т(значения *σb* и *σ02* следует умножать на 1.E7)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| t,  мм | Mt,  мм | St,  Н/м2 | M*σb*,  Н/м2 | S*σb*,  Н/м2 | M*σ02*,  Н/м2 | S*σ02*,  Н/м2 | Номинальные  *σb σ02* | |
| 0.8 | 0.83 | 0.037 | 66.15 | 1.14 | 37.04 | 4.47 | 52.0 | 28.0 |
| 1.0 | 1.02 | 0.039 | 66.64 | 2.94 | 37.08 | 4.30 | то же | то же |
| 1.5 | 1.55 | 0.052 | 66.32 | 3.24 | 36.09 | 3.82 | " | " |
| 2.0 | 2.05 | 0.059 | 67.33 | 2.94 | 37.17 | 3.54 | " | " |
| 2.5 | 2.56 | 0.060 | 67.11 | 2.79 | 37.71 | 2.85 | " | " |
| 3.0 | 3.15 | 0.092 | 63.81 | 2.61 | 33.90 | 5.41 | " | " |

Таблица 12

Прессованные профили из сплава Д16

|  |  |
| --- | --- |
| Характеристика | Значение, % |
| Коэффициент вариации толщины профиля | 1 - 5 |
| Коэффициент вариации ширины полки | 0.2 - 0.8 |
| Коэффициент вариации ширины стенки | 0.2 - 0.8 |
| Коэффициент вариации предела прочности | 2 - 8 |
| Коэффициент вариации предела пропорциональности | 2 - 8 |

Таблица 13

Ориентировочные данные по модулю упругости и

коэффициентам корреляции

|  |  |
| --- | --- |
| Характеристика | Значение |
| Математическое ожидание модуля упругости сплава Д16 - ME,H/м2 | 0.68E11 |
| То же стали Х18Н10Т | 2.1E11 |
| Коэффициент вариации модуля упругости, % | 5 |
| Коэффициент корреляции толщины и предела прочности | -0.2 |
| Коэффициент корреляции толщины и предела пропорциональности | -0.2 |
| Коэффициент корреляции толщины и модуля упругости | -0.2 |
| Коэффициент корреляции двух любых размеров поперечного сечения профиля | -0.2 |

## 4. Содержание ЛР

1. Выбрать по согласованию с руководителем деталь - объект исследования. Уточнить ее функциональное назначение и характер нагружения.
2. Сформулировать постановку задачи, состав случайного вектора, определить его математическое ожидание и ковариационную матрицу.
3. Разработать план численного эксперимента, обеспечивающий достижение поставленных задач по объему информации и точности. Выбрать способ статистической обработки результатов.
4. Произвести счет на ПК.
5. Сопоставить полученные результаты с данными детерминированного расчета. Определить вероятность разрушения детали при различных значениях коэффициента безопасности.

## 5. Содержание отчета

1. Постановка задачи;
2. Методы решения задачи;
3. Результаты моделирования;
4. Сопоставление результатов, полученных двумя разными методами;
5. Анализ полученных результатов;
6. Выводы.

## 6. Контрольные вопросы

1. Определение случайного вектора.
2. Математическое ожидание и ковариационная матрица.
3. Дисперсия, ковариация, коэффициент корреляции.
4. Собственные векторы и собственные значения ковариационной матрицы.
5. Каноническое разложение случайного вектора. Графическое изображение канонического разложения случайного вектора.
6. Несущая способность детали. Ее определение.

# Работа № 7. Моделирование ветровой и транспортной нагрузки

## 1. Модель

Важнейшей характеристикой случайной функции является ее корреляционная (автокорреляционная) функция. Корреляционной функцией двух аргументов *t* и *t’* называется неслучайная функция *Kx*(*t,t’*) , равная ковариации соответствующих сечений.



Корреляционная функция характеризует изменчивость случайной функции.

Особый класс случайных функций составляют стационарные случайные функции. Их вероятностные характеристики не зависят от начала отсчета аргумента. Математическое ожидание и дисперсия стационарных случайных функций постоянны, а корреляционная функция зависит только от расстояния между сечениями.

Корреляционная функция стационарной случайной функции зависит только от расстояния между сечениями *τ = t - t'* :



Корреляционная функция - функция четная:



Корреляционная функция по абсолютной величине не превышает дисперсии случайной функции:



Производная корреляционной функции при нулевом значении аргумента равна нулю (приводится без доказательства):



Если V скорость изменения случайной функции X (производная X), то



Стационарная случайная функция эргодична по отношению к математическому ожиданию, если справедливо равенство



Каноническое разложение стационарной случайной функции имеет вид:



где *Uj* и *Vj*- центрированные некоррелированные случайные величины с попарно равными дисперсиями *D*(*Uj*) = *D*(*Vj*) = *Dj*.

Такое разложение называется спектральным. Ему соответствует разложение в ряд Фурье по косинусам корреляционной функции:



Отсюда для дисперсии при *τ* = 0



В случае непериодической стационарной случайной функции вместо рядов Фурье используется пара интегральных преобразований Фурье:



При τ = 0, получим каноническое разложение дисперсии



Отсюда становится ясен смысл функции *G*(*ω*) - это спектр дисперсии стационарной случайной функции.

## 2. Задание

Исследовать вероятностные характеристики стационарной случайной функции по указанию преподавателя.

## 3. Содержание ЛР

1. Выполнить спектральный анализ и синтез корреляционной функции.
2. Построить каноническое разложение случайной функции.
3. Произвести генерирование нескольких реализаций функции.
4. Выполнить сглаживание одной из реализаций при помощи кубического сплайна.

## 4. Содержание отчета.

1. Описание физической модели.
2. Краткое описание математической модели.
3. Результаты спектрального анализа корреляционной функции.
4. Результаты спектрального синтеза корреляционной функции.
5. Результаты канонического разложения случайной функции.
6. Выводы по работе.

## 5. Варианты индивидуальных заданий.

Таблица 14

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| №  варианта | Корреляционная функция | Параметр  D α β V | | | |
| 1 |  | 25 м2с-2 | 3 с-1 |  |  |
| 2 | 35 м2с-2 | 6 с-1 |  |  |
| 3 | 45 м2с-2 | 9 с-1 |  |  |
| 4 |  | 25 м2с-2 | 4 с-1 | 1.0 с-1 |  |
| 5 | 35 м2с-2 | 7 с-1 | 1.5 с-1 |  |
| 6 | 45 м2с-2 | 10 с-1 | 2.0 с-1 |  |
| 7 |  | 25\*10-4 м2 | 0.02 м-1 | 0.15 м-1 | 15 м/с |
| 8 | 64\*10-4 м2 | 0.05 м-1 | 0.10 м-1 | 10 м/с |
| 9 | 100\*10-4 м2 | 0.10 м-1 | 0.06 м-1 | 5 м/с |
| 10 | 80\*10-4 м2 | 0.06м-1 | 0.06 м-1 | 8 м/с |

## 6. Контрольные вопросы

1. Определение случайной функции и ее вероятностных характеристик.
2. Корреляционная функция, её свойства.
3. Спектральные характеристики стационарных случайных функций.
4. Каноническое разложение стационарных случайных функций.
5. Эргодические свойства стационарных случайных функций.

# ~~Работа № 10. Моделирование полета крылатой ракеты в турбулентной атмосфере~~

## ~~Модель~~

**~~А~~**~~. Передаточной функцией называется отношение реакции системы на воздействие, имеющему вид гармонической функции, к этому воздействию.~~

~~~~

~~Здесь~~ *~~p~~* ~~комплексный параметр.~~

~~Частотная характеристика системы~~ *~~W~~*~~(~~*~~iω~~*~~) - это передаточная функция после подстановки чисто мнимого параметра~~ *~~p=iω~~*~~.~~

~~Спектральная плотность реакции линейной системы~~ *~~G~~~~y~~*~~(~~*~~ω~~*~~) на случайное воздействие в виде стационарной случайной функции со спектром~~ *~~G~~~~x~~*~~(~~*~~ω~~*~~) определяется при помощи соотношения~~

*~~G~~~~x~~*~~(~~*~~ω~~*~~)=|~~ *~~W~~*~~(~~*~~iω~~*~~)|~~~~2~~ *~~G~~~~x~~*~~(~~*~~ω~~*~~).~~

~~Дисперсия реакции системы~~

~~~~

**~~Б~~**~~. В лабораторной работе в качестве технической системы рассматривается крылатая ракета, возмущенный полет которой описывается следующей системой уравнений.~~

~~~~

~~Уравнения записаны для следующих переменных:~~

*~~V~~* ~~- приращение скорости полета;~~

*~~ϑ~~* ~~- приращение угла тангажа;~~

*~~Θ~~* ~~- приращение угла наклона траектории к горизонту;~~

*~~δ~~* ~~- приращение угла отклонения рулей высоты;~~

*~~α~~* ~~- приращение угла атаки;~~

*~~y~~* ~~- приращение высоты полета;~~

*~~u~~*~~- пульсационная составляющая скорости ветра, перпендикулярная направлению полета.~~

~~Звездочкой отмечена скорость невозмущенного полета.~~

~~Правые части третьего и четвертого уравнений различны и зависят от характера возмущения. При анализе полета КР в турбулентной атмосфере (ЛР10) используется верхний вариант, при рассмотрении полета на малой высоте (ЛР11)– нижний вариант.~~

~~Первое и пятое уравнения являются уравнениями движения центра масс ракеты в проекциях на касательную и нормаль к траектории. Второе уравнение описывает вращательное движение ракеты вокруг центра масс. Четвертое уравнение - уравнение автопилота.~~ *~~l~~*~~1~~~~...~~*~~l~~*~~4~~ ~~- его передаточные числа. Третье уравнение - кинематическое. Это связь между углами тангажа, атаки, наклона траектории и дополнительного угла атаки, вызванного турбулентными пульсациями. Динамические коэффициенты, входящие в уравнения таковы. Все они выражены через параметры невозмущенного движения.~~

~~~~

~~Кроме ранее расшифрованных обозначений здесь использованы также:~~

*~~M~~* ~~- масса ракеты;~~

*~~M~~~~Z~~* ~~- аэродинамический момент относительно поперечной оси;~~

*~~I~~~~Z~~* ~~- момент инерции относительно поперечной оси;~~

*~~P~~* ~~- тяга двигательной установки воздушно-реактивного двигателя ракеты;~~

*~~g~~* ~~- ускорение свободного падения.~~

~~Верхний индекс обозначает производную по соответствующей переменной. Производные равны:~~

~~~~

~~Здесь~~ *~~C~~~~X~~~~, C~~~~Y~~~~, m~~~~Z~~* ~~- аэродинамические коэффициенты,~~ *~~q~~* ~~- скоростной напор,~~ *~~G~~*~~В~~ ~~- расход воздуха в двигателе. Остальные производные считаются равными нулю.~~

~~После преобразования по Лапласу уравнения возмущенного движения запишутся в операторной форме в виде системы алгебраических уравнений. Решение системы уравнений находится по правилам линейной алгебры.~~

**~~В~~**~~. Переменная составляющая скорости ветра характеризует турбулентное движение атмосферы. В соответствии с гипотезой «замороженности» Тейлора считается, что вследствие большой скорости полета ракеты время пролета интервала корреляции турбулентного движения мало, и за это время поле скоростей атмосферы не изменяется.~~

~~Вторая гипотеза касается однородности и изотропности поля скоростей. Вследствие этого корреляционная функция пульсационной составляющей скорости зависит только от расстояния между точками пространства. Корреляционная функция проекции~~ *~~u~~* ~~вектора скорости ветра на нормаль к направлению движения ракеты, полученная аппроксимацией экспериментальных данных, имеет следующий вид~~

~~~~

~~где~~ *~~σ~~~~u~~*~~2~~~~- дисперсия переменной составляющей скорости ветра,~~

*~~L~~~~u~~* ~~- поперечный масштаб турбулентности.~~

~~Масштаб турбулентности равен 200...300 м. Параметр~~ *~~σ~~~~u~~* ~~зависит от состояния погоды:~~

~~ясная погода~~ *~~σ~~~~u~~* ~~= 2. . .3 м/с;~~

~~кучевые облака~~ *~~σ~~~~u~~* ~~= 8. . . 12/с;~~

~~грозовые условия~~ *~~σ~~~~u~~* ~~= 18. . .25 м/с.~~

~~Для перехода к корреляционной функции, зависящей от времени, следует воспользоваться соотношением, вытекающим из гипотезы о замороженном поле скоростей . Соответствующая спектральная плотность равна [5]:~~

~~~~

## ~~2. Задание~~

~~При помощи численного эксперимента исследовать влияние параметров ракеты или траектории ее полета на статистические показатели возмущенного движения. Конкретное задание выдается преподавателем из числа, предусмотренных в п. 5.~~

## ~~3. Содержание ЛР~~

1. ~~Используя образец компьютерной программы уточнить состав и числовые значения исходных данных.~~
2. ~~Составить план численного эксперимента.~~
3. ~~Внести в образец компьютерной программы изменения, соответствующие заданию.~~
4. ~~Выполнить расчеты и составить отчет.~~

## ~~4. Содержание отчета.~~

* 1. ~~Постановка задачи.~~
  2. ~~Краткое описание математической модели.~~
  3. ~~План численного эксперимента. Компьютерная программа.~~
  4. ~~Результаты расчетов.~~
  5. ~~Анализ результатов.~~
  6. ~~Выводы по работе.~~

## ~~5. Варианты индивидуальных заданий~~

~~Таблица 15~~

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ~~№~~ | ~~Аргумент~~ | ~~Функция~~ | ~~Примечание~~ |
| ~~1~~ | ~~Скорость полета~~ | ~~Поперечная перегрузка~~ |  |
| ~~2~~ | ~~То же~~ | ~~Угол отклонения руля высоты~~ |  |
| ~~3~~ | ~~То же~~ | ~~Скорость отклонения руля высоты~~ |  |
| ~~4~~ | ~~То же~~ | ~~Высота полета~~ |  |
| ~~5~~ | ~~Масса ( момент инерции, длина корпуса)~~ | ~~Поперечная перегрузка~~ | ~~Массу, момент инерции и длину ракеты следует изменять одновременно~~ |
| ~~6~~ | ~~То же~~ | ~~Угол отклонения руля высоты~~ | ~~То же~~ |
| ~~7~~ | ~~То же~~ | ~~Скорость отклонения руля высоты~~ | ~~То же~~ |
| ~~8~~ | ~~То же~~ | ~~Высота полета~~ | ~~То же~~ |
| ~~9~~ | ~~Характерная площадь~~ | ~~Поперечная перегрузка~~ |  |
| ~~10~~ | ~~То же~~ | ~~Угол отклонения руля высоты~~ |  |
| ~~11~~ | ~~То же~~ | ~~Скорость отклонения руля высоты~~ |  |
| ~~12~~ | ~~То же~~ | ~~Высота полета~~ |  |
| ~~13~~ | ~~Производная Cy по альфа~~ | ~~Поперечная перегрузка~~ |  |
| ~~14~~ | ~~То же~~ | ~~Угол отклонения руля высоты~~ |  |
| ~~15~~ | ~~То же~~ | ~~Скорость отклонения руля высоты~~ |  |

## ~~6. Контрольные вопросы~~

1. ~~Передаточная функция.~~
2. ~~Частотная характеристика.~~
3. ~~Спектральная плотность.~~
4. ~~Дисперсия.~~
5. ~~Физические причины выявленной зависимости.~~

# ~~Работа № 11. Моделирование полета крылатой ракеты на малой высоте~~

## ~~1. Модель~~

~~Математическая модель возмущенного движения ракеты приведена в описании ЛР10. Рельеф местности описывается случайной функцией пути~~ *~~x~~*~~. Считается, что эта функция стационарна, имеет нормальное распределение, нулевое математическое ожидание и корреляционную функцию вида~~

~~~~

~~Параметры~~ *~~σ~~* ~~и~~ *~~β~~* ~~корреляционной функции связаны с геоморфологическими характеристиками рельефа – глубиной~~ *~~a~~* ~~и частотой~~ *~~b~~* ~~расчленения - соотношениями~~

~~~~

~~Глубина и частота расчленения рельефа местности в свою очередь являются случайными величинами. Их числовые значения с вероятностью 90% заключены в пределах (в метрах)~~

~~0 <~~ *~~a~~* ~~< 20; 400 <~~ *~~b~~* ~~< 1500.~~

~~Переход от пространственного измерения к временнóму очевиден:~~ *~~t = x~~*~~/~~*~~V~~*~~.~~

~~Спектральная плотность и корреляционная функция стационарной случайной функции связаны формулой~~

~~~~

## ~~2. Задание~~

~~При помощи численного эксперимента исследовать влияние параметров ракеты или траектории ее полета на статистические показатели возмущенного движения. Конкретное задание выдается преподавателем из числа, предусмотренных в п.5 вариантов.~~

## ~~3. Содержание ЛР~~

* 1. ~~Используя образец компьютерной программы к ЛР10 уточнить состав и числовые значения исходных данных.~~
  2. ~~Составить план численного эксперимента.~~
  3. ~~Внести в образец компьютерной программы изменения, соответствующие заданию.~~
  4. ~~Выполнить расчеты и составить отчет.~~

## ~~4. Содержание отчета~~

* 1. ~~Постановка задачи.~~
  2. ~~Краткое описание математической модели.~~
  3. ~~План численного эксперимента. Компьютерная программа.~~
  4. ~~Результаты расчетов.~~
  5. ~~Анализ результатов.~~
  6. ~~Выводы по работе.~~

## ~~Варианты индивидуальных заданий~~

~~Таблица 16~~

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ~~№~~ | ~~Аргумент~~ | ~~Функция~~ |
| ~~1~~ | ~~Глубина расчленения~~ | ~~Поперечная перегрузка~~ |
| ~~2~~ | ~~Угол отклонения руля высоты~~ |
| ~~3~~ | ~~Скорость отклонения руля высоты~~ |
| ~~4~~ | ~~Высота полета~~ |
| ~~5~~ | ~~Частота расчленения~~ | ~~Поперечная перегрузка~~ |
| ~~6~~ | ~~Угол отклонения руля высоты~~ |
| ~~7~~ | ~~Скорость отклонения руля высоты~~ |
| ~~8~~ | ~~Высота полета~~ |
| ~~9~~ | ~~Скорость полета ракеты~~ | ~~Поперечная перегрузка~~ |
| ~~10~~ | ~~Угол отклонения руля высоты~~ |
| ~~11~~ | ~~Скорость отклонения руля высоты~~ |
| ~~12~~ | ~~Высота полета~~ |

## ~~6. Контрольные вопросы~~

* + ~~Передаточная функция.~~
  + ~~Частотная характеристика.~~
  + ~~Спектральная плотность.~~
  + ~~Закон распределения вероятностей случайной функции.~~
  + ~~Дисперсия.~~
  + ~~Физические причины выявленной зависимости.~~

# Л.р. 10… Однофакторная линейная регрессия.

В лабораторной работе для заданного набора из n данных (x1,y1), (x2,y2), ....,(xn,yn) осуществляется подбор параметров одномерной регрессии первого порядка в виде выражения M(y/x)=0+1x.

Предполагается, что наблюдения yi представлены в виде yi= 0+1x+Gi, где Gi - случайные ошибки, независимые при различных измерениях и одинаково распределенные с нулевым средним и дисперсией 2. Величина 2 определяется по результатам наблюдений.

Как известно по методу наименьших квадратов в качестве оценок параметров   берутся такие значения b0 и b1, которые обращают в минимум выражение

,

что приводит к системе нормальных уравнений, которую в данных обозначениях можно записать в виде

 =(XTX)-1XTY, где

  , откуда получается

 и . В последнем выражении

 и .

Полученные оценки являются несмещенными ( M[b]=), состоятельными и эффективными в классе линейных оценок. Корреляционная матрица оценок коэффициентов b определяется как .

Выборочная функция регрессии =b0+b1x является точечной оценкой истинной функции регрессии y=0+1x. При этом ее дисперсия в фиксированной точке x0 вычисляется по формуле , где . Введя обозначение  данное выражение можно преобразовать к виду .

Для оценки приближения выборочной функции регрессии =b0+b1x относительно истинной y=0+1x используется интервальная оценка. При ее получении предполагается, что ошибки наблюдения подчинены нормальному закону распределения. В этом случае статистика  подчинена распределению Стьюдента с n-2 степенями свободы. В последнем выражении s - несмещенная точечная оценка дисперсии . Это позволяет построить доверительный интервал для величины y(x0):

, который с доверительной вероятностью (1-) накрывает истинное значение функции регрессии в точке x0. Из последнего соотношения следует, что величина доверительного интервала зависит как от заданной точки x0, так и от значений x1, x2,...,xn.

Во многих случаях анализ исходных данных показывает наличие существенно нелинейной зависимости. Однако применение преобразований исходных данных очень часто позволяет применить линейную модель. Примерами таких преобразований может быть:

кривая Гомперца y=L\*exp(-b\*exp(-kt)), которая логарифмированием переводится к линейному виду,

либо собственно логарифмическая функция,

либо другое преобразование, обеспечивающее линеаризацию.

## Порядок выполнения расчетов и оформления отчета по лабораторной работе.

Лабораторная работа состоит в определении функции регрессии по заданным данным, проведения доверительного оценивания значений функции регрессии на некотором интервале, контроля остатков.

В отчете по лабораторной работе необходимо представить:

* данные по определению функции регрессии в табличном и графическом виде;
* провести стандартизацию данных;
* при необходимости – линеаризацию данных;
* выполнить собственно линейный регрессионный анализ для данных, преобразованных по указанной выше схеме, с оценками адекватности и значимости построенной модели;
* график зависимости относительных остатков от соответствующих им объемов значений функции регрессии;
* провести анализ графика остатков и при необходимости принять действия, обеспечивающие устранение выявленных несоответствий модели и экспериментальных данных;
* Построить прогноз развития явления на заданный преподавателем период.

## Наборы данных для Л.р. 10

Максимальная тяга, развиваемая американскими ЖРД ([фунты]).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | | Максимальная тяга, развиваемая американскими ЖРД ([фунты]). | |
| 1942 | 1010 | |
| 1943 | 4.50e+03 | |
| 1945 | 1.95e+04 | |
| 1948 | 2.01e+04 | |
| 1949 | 9.00e+04 | |
| 1952 | 1.05e+05 | |
| 1953 | 2.20e+05 | |
| 1955 | 3.01e+05 | |
| 1960 | 4.00e+05 | |
| 1961 | 1.50e+06 | |
| 1963 | 1.50e+06 | |

Максимальная тяга, развиваемая американскими РДTT ([фунты]).

|  |  |
| --- | --- |
| Год | Максимальная тяга, развиваемая американскими РДТТ ([фунты]). |
| 1956 | 2.80e+04 |
| 1959 | 5.08e+04 |
| 1961 | 1.70e+05 |
| 1962 | 2.93e+05 |
| 1964 | 1.68e+06 |
| 1965 | 3.60e+06 |

Максимальный полный импульс, развиваемый американскими РДТТ ([фунты]).

|  |  |
| --- | --- |
| Год | Полный импульс, развиваемая американскими РДТТ ([фунты/с]). |
| 1955 | 1.60e+06 |
| 1956 | 1.40e+05 |
| 1958 | 3.80e+06 |
| 1959 | 1.00e+07 |
| 1961 | 2.96e+07 |
| 1962 | 3.07e+07 |
| 1964 | 1.70e+08 |
| 1966 | 3.89e+08 |
| 1967 | 8.50e+08 |

Производство электроэнергии в США (млрд. КВт)

|  |  |
| --- | --- |
| 1945 | 193.6 |
| 1950 | 280.5 |
| 1951 | 318.2 |
| 1952 | 342.5 |
| 1953 | 384.2 |
| 1954 | 410.9 |
| 1955 | 480.9 |
| 1956 | 530.1 |
| 1957 | 557.8 |
| 1958 | 569.2 |
| 1959 | 626.7 |
| 1960 | 683.2 |
| 1961 | 720.7 |
| 1962 | 776.1 |
| 1963 | 830.8 |
| 1964 | 890.4 |
| 1965 | 953.8 |
| 1966 | 1039 |

Увеличение точности хода часов

|  |  |
| --- | --- |
| Год (с точностью до 10 лет) | секунды в сутки |
| 1960 | 10 |
| 1715 | 6 |
| 1720 | 1 |
| 1770 | 0.25 |
| 1830 | 0.1 |
| 1897 | 0.01 |
| 1920 | 0.003 |

Градуировка рентгеновского спектрометра

Приведена таблица содержаний образцов Cr-Fe-Ni и соответствующих им интенсивностей аналитических линий.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N | CCr | ICr | CFe | IFe | CNi | INi |
| 1 | 0.2955 | 1.19403 | 0.1108 | 0.2567 | 0.5937 | 2.7053 |
| 2 | 0.2946 | 1.18187 | 0.2090 | 0.455191 | 0.4964 | 2.02627 |
| 3 | 0.2929 | 1.18209 | 0.3131 | 0.64664 | 0.3940 | 1.45155 |
| 4 | 0.2913 | 1.19530 | 0.4110 | 0.813919 | 0.2977 | 1.0058 |
| 5 | 0.2911 | 1.21980 | 0.5124 | 0.975518 | 0.1965 | 0.611372 |
| 6 | 0.2958 | 1.26901 | 0.6052 | 1.10814 | 0.0990 | 0.28667 |
| 7 | 0.0998 | 0.527787 | 0.8003 | 1.99289 | 0.1008 | 0.280568 |
| 8 | 0.0984 | 0.504054 | 0.7037 | 1.80872 | 0.1979 | 0.590508 |
| 9 | 0.0979 | 0.483339 | 0.6056 | 1.61684 | 0.2965 | 0.955113 |
| 10 | 0.0989 | 0.472206 | 0.5036 | 1.40421 | 0.3975 | 1.39585 |
| 11 | 0.0985 | 0.45911 | 0.4012 | 1.18359 | 0.5003 | 1.93597 |
| 12 | 0.0987 | 0.454029 | 0.2031 | 0.692673 | 0.6982 | 3.38549 |
| 13 | 0.1689 | 0.745096 | 0.1087 | 0.335517 | 0.7224 | 3.71625 |
| 14 | 0.1665 | 0.724382 | 0.2599 | 0.714209 | 0.5736 | 2.44796 |
| 15 | 0.1648 | 0.729419 | 0.4011 | 1.02811 | 0.4281 | 1.57320 |
| 16 | 0.1658 | 0.760356 | 0.5552 | 1.307 | 0.2790 | 0.900362 |
| 17 | 0.1679 | 0.808445 | 0.7035 | 1.56384 | 0.1286 | 0.370253 |
| 18 | 0.2391 | 1.00277 | 0.1042 | 0.273148 | 0.6567 | 3.17416 |
| 19 | 0.2389 | 0.989956 | 0.2297 | 0.550672 | 0.5314 | 2.2142 |
| 20 | 0.2371 | 0.997106 | 0.3457 | 0.778584 | 0.4172 | 1.54747 |
| 21 | 0.2336 | 1.0 | 0.4667 | 1.0 | 0.2997 | 1.0 |
| 22 | 0.2338 | 1.08325 | 0.5868 | 1.20011 | 0.1794 | 0.543859 |
| 23 | 0.3841 | 1.47714 | 0.1241 | 0.242136 | 0.4918 | 2.05279 |
| 24 | 0.3858 | 1.48144 | 0.2485 | 0.452916 | 0.3657 | 1.34531 |
| 25 | 0.3872 | 1.50861 | 0.3771 | 0.649091 | 0.2357 | 0.773879 |
| 26 | 0.3888 | 1.56562 | 0.5059 | 0.830090 | 0.1053 | 0.31247 |

Рост скоростей боевой авиации

|  |  |
| --- | --- |
| Год достижения скорости | скорость, км/час |
| 1918 | 180 |
| 1921 | 210 |
| 1922 | 220 |
| 1925 | 280 |
| 1930 | 379 |
| 1932 | 426 |
| 1932 | 432 |
| 1935 | 521 |
| 1938 | 623 |
| 1939 | 657 |
| 1940 | 710 |
| 1941 | 775 |
| 1947 | 1097 |
| 1948 | 1178 |

# ЛР 11. Многофакторная линейная регрессия

## Порядок выполнения расчетов и оформления отчета по лабораторной работе.

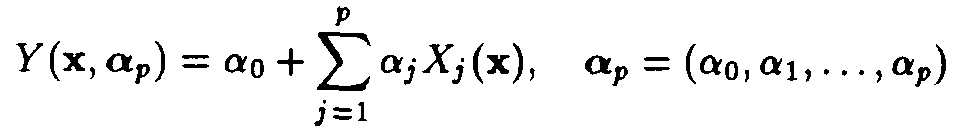
Цель данной работы: получение модели рассматриваемого явления и построение на ее основе прогноза.

Для заданного преподавателем набора данных построить набор моделей и определить их коэффициенты. Провести анализ полученных моделей пользуйтесь схемой классического регрессионного анализа и одной из схем выбора оптимальной модели.

## Метод всех возможных регрессий

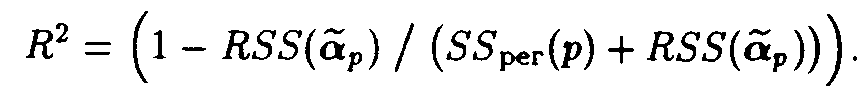
Построим все возможные регрессионные уравнения, которые содержат  и  преобразованных переменных , где *т -* число базисных функций , которые образуют полный набор. Поскольку для каждой преобразованной переменной  есть всего две возможности: либо входить, либо не входить в уравнение, то всего будет  уравнений.

Каждое возможное регрессионное уравнение вида



-  - вектор параметров, , оценивается с помощью критериев.

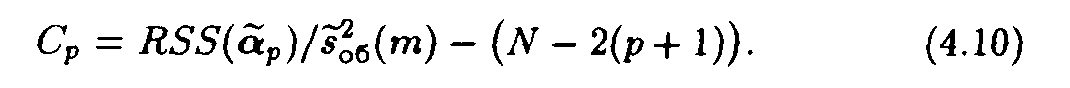
1. *Критерий R2.* Оценивается величина (см. гл. 3, § 5)



2. *Остаточный средний квадрат.* Оценивается величина

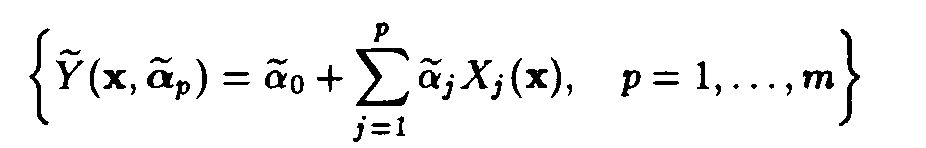


3. *-статистика.* Оценивается величина



**Схема анализа:**

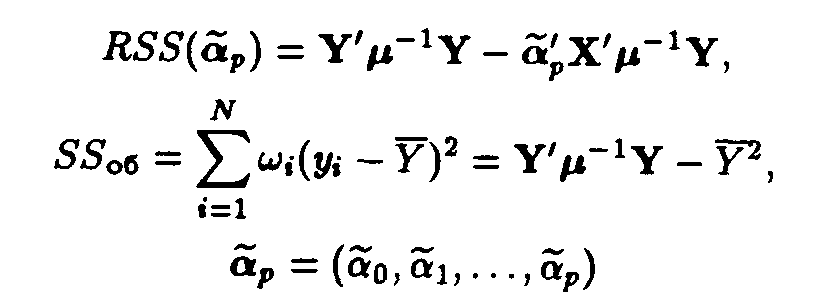
*1-й этап.*Из всех подмножеств регрессионных моделей (МНК решений):



выбираем те уравнения регрессии, которые имеют наибольший коэффициент множественной корреляции

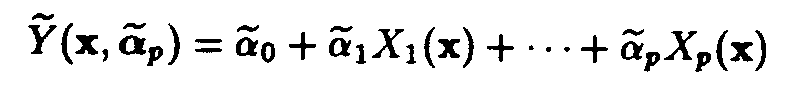


где



(в общем случае для коррелированных наблюдений ).

*2-й этап.* Рассмотрим зависимость остаточного среднего ква­драта  от числа преобразованных переменных *,* входящих в уравнение регрессии



с числом параметров модели, равным (+ 1). Строится график  как функция  (рис. 11).

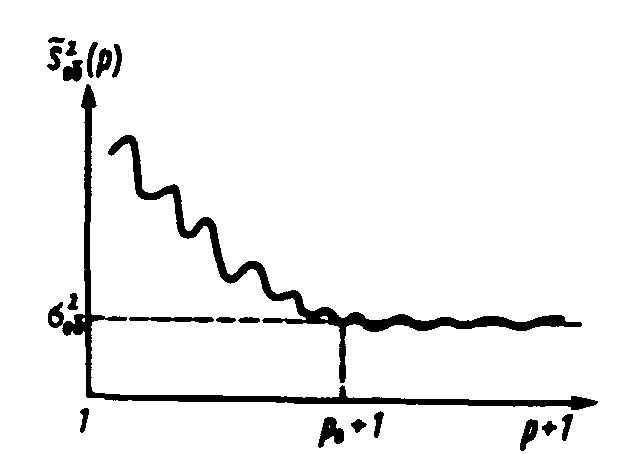


Рис. 1. Зависимость остаточного среднего квадрата  от числа параметров модели регрессии (включая )*, * + 1 - оптимальное число параметров (стабилизация )

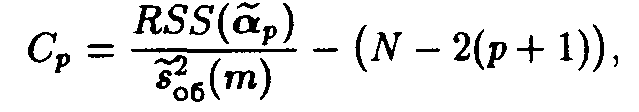
Средний квадрат  имеет тенденцию стабилизироваться и приближаться к истинной величине объединенной дисперсии  с ростом числа преобразованных переменных , что позволяет выбрать наименьшее число преобразованных переменных из первоначального набора m, который включает больше базисных функций , чем нужно для удовлетворительного согласия экспериментальных и расчетных данных.

Таким образом, в рамках линейного МНК оценивания на основании критерия  и графика  мы можем выбрать модель или модели регрессии, которые включают наименьшее число преобразованных переменных .

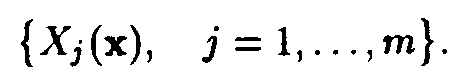
Для более однозначного выбора "наилучшего" уравнения регрессии необходимо дополнительно к  и  использовать критерий  (совместный анализ  *,*  и ).

Критерий  (статистика )*.*

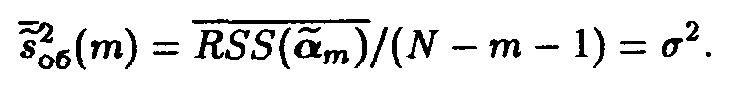
-статистика (как случайная величина) определяется соотношением



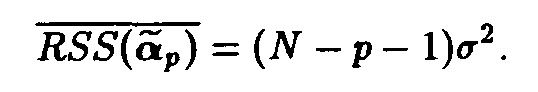
где  *-* остаточная сумма квадратов для модели регрессии, содержащей  параметров,  - остаточный средний квадрат для уравнения регрессии, содержащего все базисные функции



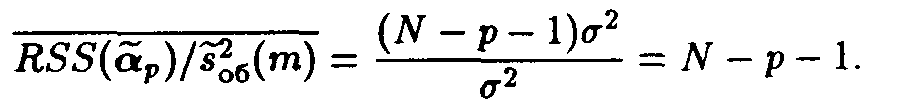
При этом предполагается, что  является надежной не­смещенной оценкой объединенной дисперсии при условии адекватности модели регрессии с  параметрами :



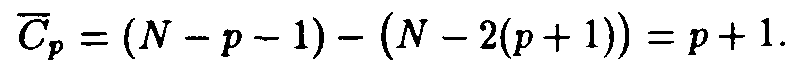
Кроме того, если уравнение регрессии с  параметрами также адекватно, т.е. наблюдается удовлетворительное согласие с экспериментом, то среднее значение 



Следовательно, отношение / имеет среднее значение



Итак, для адекватной модели регрессии верно соотношение



Отсюда следует, что график эмпирической зависимости  от  для адекватной модели регрессии будет иметь вид кривой, точки которой близко примыкают к прямой =+ 1.

Наилучшая модель регрессии из всех возможных (наряду с  и ) отбирается с малым значением *,* примерно равным , что позволяет определить оптимальное число преобразованных переменных  (наиболее важных), которые следует сохранить в уравнении регрессии - вариант, предпочтительный по сравнению с остальными. Такой выбор оптимального числа преобразованных переменных  (или параметров модели ) позволяет (наряду со здравым смыслом) сократить затраты машинного времени, которые становятся чрезмерными для большого числа преобразованных переменных (параметров).

## Метод пошагового анализа

Шаговая регрессия является промежуточным вариантом между методом включения и исключения.

Проблема как и вовсех предыдущих ситуациях заключается в том, что могут существовать корреляции ( а правильнее сказать сопряженность) между факторами. Результатом этого является то, что матрица системы нормальных уравнений близка к вырожденности, что приводит к неустойчивости оценок параметров β, причем дисперсия  не определена при . В таком случае необходимо выбрать такое подмножество преобразованных переменных , которые объясняют наибольшую долю дисперсии отклика.

В рассматриваемом в данном параграфе случае используется пошаговая процедура включения регрессоров.

***1-й шаг***. Построим таблицу выборочных коэффициентов корреляции (сопряженности) между откликом y и детерминированной переменной  -  (4.11)

Этот выборочный коэффициент корреляции служит эмпирической мерой линейной зависимости между y и .

Прежде всего выбирается переменная , наиболее сильно коррелированная с y. Предположим, что это , и находится линейное регрессионное МНК уравнение первого порядка . Затем проверяется значима ли эта переменная, т.е. проверяется гипотеза H0: b1=0 против H1: b1<>0.

Если наблюдаемое значение критерия , что означает, что уравнение регрессии значимо, т.е. можно расценивать предложенную модель как удовлетворительную для предсказания. В противном случае, когда  необходимо принять, что наилучшая модель определяется уравнением .

***2-й шаг***. Если выполняется , то найдем вторую переменную, которую следует включить в модель. Для этого определим частные коэффициенты корреляции  для всех переменных  не включенных в уравнение на первом шаге (), что эквивалентно нахождению корреляций между остатками от регрессии , т.е.  и  с  по соотношению (4.11) с заменой , , где .

В общем случае для произвольного шага номера р+1 частные коэффициенты корреляции  есть корреляции между остатками регрессии  и не включенными в уравнение регрессии переменными .

Предположим, что наибольшее значение  соответствует регрессору . Тогда находим новое регрессионное уравнение для второго шага

 (p=2)

Данная модель снова проверяется на значимость 

Дополнительно оценивается R2, которое при улучшении описания должно возрастать.

Дополнительную информацию для проверки модели можно получить при проверке гипотезы Н0: β2=0 против альтернативы  с помощью t- критерия: , 

Причем если , либо , то гипотеза Н0 отклоняется, т.е. включение в модель регрессии переменной  значимо. Если оказывается, что  имеет незначимый вклад в регрессию на данном шаге, то она исключается из уравнения. Эта процедура с использованием F критерия, в которой проверяется только та переменная, которая включена в уравнение регрессии последней, называется методом включения. Метод включения приводит к тому, что переменные, введенные в модель регрессии на данном шаге, не исключаются из нее в дальнейшем. Что оправдано в предположении приближенной независимости регрессоров. Однако его эффективность падает, если существует сопряженность регрессоров.

Решение вопроса о целесообразности включения того или иного члена определяется на основе сопоставления части суммы квадратов порожденных регрессией, и связанных с включением в модель рассматриваемых членов, и дисперсии измерений, Если соответствующий средний квадрат значимо превышает дисперсию измерений, то члены следует включить в рассмотрение.



В результате необходимо проверять

1. F критерий значимости модели 

2. ,

Вместо t критерия для проверки гипотезы Н0: βj=0 можно использовать F критерий, определяемый следующими соотношениями 

Данный критерий как и t критерий индивидуальный для каждой переменной. При этом может оказаться, что переменная, включенная на предыдущих шагах, на более поздних оказывается ненужной в по результатам текущей проверки. Для последнего F критерия будем использовать термин «критерий для включения» и по нему будет приниматься решение о включении, либо исключении переменной их анализа.

Проверка значимости улучшения описания данных эксперимента в рамках линейной модели регрессии проводится на каждом шаге анализа. В конечном счете пошаговый процесс прекращается, если никакая новая переменная не в состоянии занять место в уравнении регрессии.

Доверительные интервалы для коэффициентов регрессии определяются по выражению , где 

## Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1. Постановку задачи
2. результаты определения оценок коэффициентов проанализированных регрессий с оценкой степени обусловленности информационной матрицы.
3. Анализ адекватности и значимости выбираемых моделей
4. Анализ, поясняющий выбор оптимальной модели.
5. Оценку доверительных интервалов для коэффициентов полученной регрессии.
6. Выводы по работе

**Варианты заданий к лабораторной работе №2 по курсу «прогнозирование»**

**Показатели производственно-хозяйственной деятельности предприятий машиностроения.**

Рассматриваются следующие показатели:

Y1 – произыодительность труда, Y2 – индекс снижения себестоимости продукции, Y3 - рентабельность, X4 – трудоемкость единицы прродукции, X5 – удельный вес рабочих в составе ППП, , X6 - удельный вес покупных изделий, X7 –коэффициент сменности оборудования, X8 – премии и вознаграждения на одного работника, X9 – удельный вес потерь от брака, X10 - фондоотдача, X11 – среднегодова численность ППП, X12- сренегодовая стоимость ОФП, X13 – среднегодовой фонд заработной платы ППП, X14 – фондовооруженность труда, X15 – оборачиваемость нормируемых оборотных средств, X16 – оборачиваемость ненормируемых оборотных средств, X17 – непроизводственные расходы

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№** | **Y** | **X** | **№** | **Y** | **X** |
| 1 | 1 | 6,8,11,12,17 | 14 | 1 | *5,* 7, 10, 14, 17 |
| 2 | 1 | 6,8,11,13,17 | 15 | 1 | *5,6,* 10, 14, 17 |
| 3 | 1 | 8,11,12,13,17 | 16 | 3 | 8,10,15,16,17 |
| 4 | 1 | 6,8,13,14,17 | 17 | 3 | *5,6,* 10, 15, 17 |
| *5* | 1 | 8, 11,13,14,17 | 18 | 3 | *5,6,7,* 11, 12 |
| 6 | 1 | 6,8,12,13,17 | 19 | 3 | 8,9,10,11,17 |
| 7 | 1 | 7,11,12,13,17 | 20 | 3 | 8,9,10,12,17 |
| 8 | 1 | 7,9,12,13,17 | 21 | 2 | *4,5,6,8,9* |
| *9* | 1 | 8,11,12,13,17 | 22 | 2 | *4,5,6,7,9* |
| 10 | 1 | 8, 9, 13, 14, 17 | 23 | 2 | *4,5,6,8,9* |
| 11 | I | *5,6,7,9,17* | 24 | 2 | 4,5,8,9,17 |
| 12 | 1 | 5,7,9,11,17 | 25 | 2 | 4,5,7,9,17 |
| 13 | 1 | *5,6,* 12, 13, 17 |  |  |  |

Таблица исходных данных (У – отклики, Х - факторы)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **N** | Y1 | Y2 | Y3 | X4 | X5 | X6 | X7 | X8 | X9 | X10 | Х11 | Х12 | Х13 | Х14 | Х15 | Х16 | Х17 |
| **1** | 9.26 | 204.2 | 13.26 | 0.23 | 0.78 | 0.40 | 1.37 | 1.23 | 0.23 | 1.45 | 26006 | 167.69 | 47750 | 6.40 | 166.32 | 10.08 | 17.72 |
| **2** | 9.38 | 209.6 | 10.16 | 0.24 | 0.75 | 0.26 | 1.49 | 1.04 | 0.39 | 1.30 | 23935 | 186.10 | 50391 | 7.80 | 92.88 | 14.76 | 18.39 |
| **3** | 12.11 | 222.6 | 13.72 | 0.19 | 0.68 | 0.40 | 1.44 | 1.80 | 0.43 | 1.37 | 22589 | 220.45 | 43149 | 9.76 | 158.04 | 6.48 | 26.46 |
| **4** | 10.81 | 236.7 | 12.85 | 0.17 | 0.70 | 0.50 | 1.42 | 0.43 | 0.18 | 1.65 | 21220 | 169.30 | 41089 | 7.90 | 93.96 | 21.96 | 22.37 |
| **5** | 9.35 | 62.0 | 10.63 | 0.23 | 0.62 | 0.40 | 1.35 | 0.88 | 0.15 | 1.91 | 7394 | 39.53 | 14257 | 5.35 | 173.88 | 11.88 | 28.13 |
| **6** | 9.87 | 53.1 | 9.12 | 0.43 | 0.76 | 0.19 | 1.39 | 0.57 | 0.34 | 1.68 | 11586 | 40.41 | 22661 | 9.90 | 162.30 | 12.60 | 17.55 |
| **7** | 8.17 | 172.1 | 25.83 | 0.31 | 0.73 | 0.25 | 1.16 | 1.72 | 0.38 | 1.94 | 26609 | 102.96 | 52509 | 4.50 | 88.56 | 11.52 | 21.92 |
| **8** | 9.12 | 56.5 | 23.39 | 0.26 | 0.71 | 0.44 | 1.27 | 1.70 | 0.09 | 1.89 | 7801 | 37.02 | 14903 | 4.88 | 101.16 | 8.28 | 19.52 |
| **9** | 5.88 | 52.6 | 14.68 | 0.49 | 0.69 | 0.17 | 1.16 | 0.84 | 0.14 | 1.94 | 11587 | 45.74 | 25587 | 3.46 | 166.32 | 11.52 | 23.99 |
| **10** | 6.30 | 46.6 | 10.05 | 0.36 | 0.73 | 0.39 | 1.25 | 0.60 | 0.21 | 2.06 | 9475 | 40.07 | 16821 | 3.60 | 140.76 | 32.40 | 21.76 |
| **11** | 6.22 | 53.2 | 13.99 | 0.37 | 0.68 | 0.33 | 1.13 | 0.82 | 0.42 | 1.96 | 10811 | 45.44 | 19459 | 3.56 | 128.52 | 11.52 | 25.68 |
| **12** | 5.49 | 30.1 | 9.68 | 0.43 | 0.74 | 0.25 | 1.10 | 0.84 | 0.05 | 1.02 | 6371 | 41.08 | 12973 | 5.65 | 177.84 | 17.28 | 18.13 |
| **13** | 6.50 | 146.4 | 10.03 | 0.35 | 0.66 | 0.32 | 1.15 | 0.67 | 0.29 | 1.85 | 26761 | 136.14 | 50907 | 4.28 | 114.48 | 16.20 | 25.74 |
| **14** | 6.61 | 18.1 | 9.13 | 0.38 | 0.72 | 0.02 | 1.23 | 1.04 | 0.48 | 0.88 | 4210 | 42.39 | 6920 | 8.85 | 93.24 | 13.32 | 21.21 |
| **15** | 4.32 | 13.6 | 5.37 | 0.42 | 0.68 | 0.06 | 1.39 | 0.66 | 0.41 | 0.62 | 3557 | 37.39 | 5736 | 8.52 | 126.72 | 17.28 | 22.97 |
| **16** | 7,37 | 89,8 | 9,86 | 0,30 | 0,77 | 0,15 | 1,38 | 0,86 | 0,62 | 1,09 | 14148 | 101,78 | 26705 | 7,19 | 91,80 | 9,72 | 16,38 |
| **17** | 7,02 | 62,5 | 12,62 | 0,32 | 0,78 | 0,08 | 1,35 | 0,79 | 0,56 | 1,60 | 9872 | 47,55 | 20068 | 4,82 | 69,12 | 16,20 | 13,21 |
| **18** | 8,25 | 46,3 | 5,02 | 0,25 | 0,78 | 0,20 | 1,42 | 0,34 | 1,76 | 1,53 | 5975 | 32,61 | 11487 | 5,46 | 66,24 | 24,84 | 14,48 |
| **19** | 8,15 | 103,5 | 21,18 | 0,31 | 0,81 | 0,20 | 1,37 | 1,60 | 1,31 | 1,40 | 16662 | 103,25 | 32029 | 6,20 | 67,68 | 14,76 | 13,38 |
| **20** | 8,72 | 73,3 | 25,17 | 0,26 | 0,79 | 0,30 | 1,41 | 1,46 | 0,45 | 2,22 | 9166 | 38,95 | 18946 | 4,25 | 50,40 | 7,56 | 13,69 |
| **21** | 6,64 | 76,6 | 19,40 | 0,37 | 0,77 | 0,24 | 1,35 | 1,27 | 0,50 | 1,32 | 15118 | 8132 | 28025 | 5,38 | 70,56 | 8,64 | 16,66 |
| **22** | 8,10 | 73,01 | 21,0 | 0,29 | 0,78 | 0,10 | 1,48 | 1,58 | 0,77 | 1,48 | 11429 | 67,26 | 20968 | 5,88 | 72,00 | 8,64 | 15,06 |
| **23** | 5,52 | 32,3 | 6,57 | 0,34 | 0,72 | 0,11 | 1,24 | 0,68 | 1,20 | 0,68 | 6462 | 59,92 | 11049 | 9,27 | 97,20 | 9,00 | 20,09 |
| **24** | 9,37 | 199,6 | 14,19 | 0,23 | 0,79 | 0,47 | 1,40 | 0,86 | 0,21 | 2,30 | 24628 | 107,34 | 45893 | 4,36 | 80,28 | 14,76 | 15,98 |
| **25** | 13,17 | 598,1 | 15,81 | 0,17 | 0,77 | 0,53 | 1,45 | 1,98 | 0,25 | 1,37 | 49727 | 512,60 | 99400 | 10,31 | 51,48 | 10,08 | 18,27 |
| **26** | 6,67 | 71,2 | 5,23 | 0,29 | 0,80 | 0,34 | 1,40 | 0,33 | 0,15 | 1,51 | 11470 | 53,81 | 20719 | 4,69 | 105,12 | 14,76 | 14,42 |
| **27** | 5,68 | 90,8 | 7,99 | 0,41 | 0,71 | 0,20 | 1,28 | 0,45 | 0,66 | 1,43 | 19448 | 80,83 | 36813 | 4,16 | 128,52 | 10,44 | 22,76 |
| **28** | 5,22 | 82,1 | 17,50 | 0,41 | 0,79 | 0,24 | 1,33 | 0,74 | 0,74 | 1,82 | 189t53 | 59,42 | 33956 | 3,13 | 94,68 | 14.76 | 15,41 |
| **29** | 10,02 | 76,2 | 17,16 | 0,22 | 0,76 | 0,54 | 1,22 | 0,03 | 0,32 | 2,62 | 9185 | 36,96 | 17016 | 4,02 | 85,32 | 20,52 | 19,35 |
| **30** | 8,16 | 119,5 | 14,54 | 0,29 | 0,78 | 0,40 | 1,28 | 0.99 | 0,89 | 1,75 | 17478 | 91,43 | 34873 | 5,23 | 76,32 | 14,40 | 16,83 |
| **31** | 3,78 | 21,9 | 6,24 | 0,51 | 0,62 | 0,20 | 1,47 | 0,24 | 0,23 | 1,54 | 6265 | 17,16 | 11237 | 2,74 | 153,00 | 24,84 | 30,53 |
| **32** | 6,48 | 48,4 | 12,08 | 0,36 | 0,75 | 0,64 | 1,27 | 0,57 | 0,32 | 2,25 | 8810 | 27,29 | 17306 | 3,10 | 107,64 | 11,16 | 17,98 |
| **33** | 10,44 | 173,5 | 9,49 | 0,23 | 0,71 | 0,42 | 1,51 | 1,22 | 0,54 | 1.07 | 17659 | 184,33 | 39250 | 10,44 | 90,72 | 6,48 | 22,09 |
| **34** | 7,65 | 74,1 | 9,28 | 0,26 | 0,74 | 0,27 | 1,46 | 0,68 | 0,75 | 1,44 | 10342 | 58,42 | 19074 | 5,65 | 82,44 | 9,72 | 18,29 |
| **35** | 8,77 | 68,6 | 11,42 | 0,27 | 0,65 | 0,37 | 1,27 | 1,00 | 0,16 | 1,40 | 8901 | 59,40 | 18452 | 6,67 | 79,92 | 3,24 | 26,05 |
| **36** | 7,00 | 60,8 | 10,31 | 0,29 | 0,66 | 0,38 | 1,43 | 0,81 | 0,24 | 1,31 | 8402 | 49,63 | 17500 | 5,91 | 120,96 | 6,48 | 26,20 |
| **37** | 11,06 | 355,6 | 8,65 | 0,01 | 0,84 | 0,35 | 1,50 | 1,27 | 0.59 | 1,12 | 32625 | 391,27 | 7888 | 11,99 | 84,60 | 5,40 | 17,26 |
| **38** | 9,02 | 264,8 | 10,94 | 0,02 | 0,74 | 0,42 | 1,35 | 1,14 | 0,56 | 1,16 | 31160 | 258,62 | 58947 | 8,30 | 85,32 | 6,12 | 18,83 |
| **39** | 13,28 | 526,6 | 9,87 | 0,18 | 0,75 | 0,32 | 1,41 | 1,89 | 0,63 | 0,88 | 46461 | 75,66 | 94697 | 1,63 | 101,52 | 8,64 | 19,70 |
| **40** | 9,27 | 118,6 | 6,14 | 0,25 | 0,75 | 0,33 | 1,47 | 0,67 | 1,10 | 1,07 | 13833 | 123,68 | 29626 | 8,94 | 107,64 | 11,88 | 16,87 |
| **41** | 6,70 | 37,1 | 12,93 | 0,31 | 0,79 | 0,29 | 1,35 | 0,96 | 0,39 | 1,24 | 6391 | 37,21 | 11688 | 5,82 | 85,32 | 7,92 | 14,63 |
| **42** | 6,69 | 57,7 | 9,78 | 0,38 | 0,72 | 0,30 | 1,40 | 0,67 | 0,73 | 1,49 | 11115 | 53,37 | 21955 | 4,80 | 131,76 | 10,08 | 22,17 |
| **43** | 9,42 | 51,6 | 13,22 | 0,24 | 0,70 | 0,56 | 1,20 | 0,98 | 0,28 | 2,03 | 6555 | 32,87 | 12243 | 5,01 | 116,64 | 18,72 | 22,62 |
| **44** | 7,24 | 64,7 | 17,29 | 0,31 | 0,66 | 0,42 | 1,15 | 1,16 | 0,10 | 1,84 | 11085 | 45,63 | 20193 | 4,12 | 138,24 | 13,68 | 26,44 |
| **45** | 5,39 | 48,3 | 7,11 | 0,42 | 0,69 | 0,26 | 1,09 | 0,54 | 0,68 | 1,22 | 9484 | 48,41 | 20122 | 5,10 | 156,96 | 16,56 | 22,26 |
| **46** | 5,61 | 15,0 | 22,49 | 0,51 | 0,71 | 0,16 | 1,26 | 1,23 | 0,87 | 1,72 | 3967 | 13,58 | 7612 | 3,49 | 137,52 | 14,76 | 19,13 |
| **47** | 5,59 | 87,5 | 12,14 | 0,31 | 0,73 | 0,45 | 1,36 | 0,78 | 0,49 | 1,75 | 15283 | 63,99 | 27404 | 4,19 | 135,72 | 7,92 | 18,28 |
| **48** | 6,57 | 108,4 | 15,25 | 0,37 | 0,65 | 0,31 | 1,15 | 1,16 | 0,16 | 1,46 | 20874 | 104,55 | 39648 | 5,01 | 155,52 | 18,36 | 28,23 |
| **49** | 6,54 | 267,3 | 31,34 | 0,16 | 0,82 | 0,08 | 1,87 | 4,44 | 0,85 | 1,60 | 19418 | 222,11 | 43799 | 11,44 | 48,60 | 8,28 | 12,39 |
| **50** | 4,23 | 34,2 | 11,56 | 0,18 | 0,80 | 0,68 | 1,17 | 1,06 | 0,13 | 1,47 | 3351 | 25,76 | 6235 | 7,67 | 42,84 | 14,04 | 11,64 |
| **51** | 5,22 | 26,8 | 30,14 | 0,43 | 0,83 | 0,03 | 1,61 | 2,13 | 0,49 | 1,38 | 6338 | 29,52 | 11524 | 4,66 | 142,20 | 16,92 | 8,62 |
| **52** | 18,00 | 43,6 | 19,71 | 0,40 | 0,70 | 0,02 | 1,34 | 1,21 | 0,09 | 1,41 | 9756 | 41,99 | 17309 | 4,30 | 145,80 | 11,16 | 20,10 |
| **53** | 11.03 | 72,0 | 23,56 | 0,31 | 0,74 | 0,22 | 1,22 | 2,20 | 0,79 | 1,39 | 11795 | 78,11 | 22225 | 6.62 | 120,52 | 14,76 | 19,41 |

# Дополнения

## Критерий Колмогорова.

Использованы следующие обозначения.

H0 - проверяемая гипотеза о теоретическом распределении,

H1 - любая альтернативная гипотеза.

Z - статистика, имеющая распределение Колмогорова, и используемая как критерий проверки гипотезы H0.

,

n - объем выборки, перестроенной в вариационный ряд x1<=x2,..,<=xn;

Fэ(x) - экспериментальная функция распределения,

Fт(x) - теоретическая функция распределения



Решающее правило:



Zкр выбирается так, чтобы вероятность ошибки первого рода равнялась заданному уровню значимости α:

P(Z < Zкр|H0) = α.

Связь между α и Zкр приведена ниже в табл. 17. В таблице учтено известны ли априорно параметры функции распределения F или они оценены по выборочным данным при малых объемах выборки n.

Таблица 17

Квантили распределения Колмогорова

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| α | | 0.01 | 0.05 | 0.10 | 0.20 |
| Zкр | Параметры известны | 1.63 | 1.36 | 1.22 | 1.07 |
| Используется оценка | 1.04 | 0.90 | 0.82 |  |

Доверительный коридор для функции F(x) с доверительной вероятностью 1- α имеет вид



## Проверка гипотез о законе распределения. Критерий соответствия (согласия) χ2

Проводя графическое сравнение гистограмм с кривой плотности распределения, можно составить представление о большей или меньшей близости теоретического и эмпирического распределений. Рассмотрим критерий проверки по данным выборки гипотезы о том, что данная величина X подчинена закону распределения F(x).Одним из наиболее употребительных критериев является критерий χ2 (К. Пирсона). Допустим сначала, что наша гипотеза полностью определяет вид функции распределения F(х). Такая гипотеза называется простой. Пусть, далее, вся область изменения величины X разбита на конечное число m интервалов Δ1, Δ2, ..., Δm, с границами X0, X1,…Xm Пусть рj, есть вероятность для величины Х при данном распределении F(x) принять значение, принадлежащее j-му множеству Δj; а nj,—число значений Х из общего числа их N в выборке попавших в Δj;. При этом, очевидно, должны выполняться условия (с потерей одной степени свободы)



Если проверяемая гипотеза верна, то *nj* представляет частоту появления события, имеющего в каждом из *N* произведенных испытаний вероятность *рj*; следовательно, можно рассматривать *nj*, как случайную величину, подчиняющуюся биномиальному закону распределения с центром в точке *Npj* и средним квадратичным  Когда *N* велико, можно считать, что частота распределена асимптотически нормально с теми же параметрами. При правильности нашей гипотезы мы можем ожидать, что будут асимптотически нормально распределены (в совокупности) также величины



В качестве меры расхождения данных выборки *n*1, *n*2,…,*n*m с “теоретическими” данными *Np*1*, Np*2*,…,Npm* рассмотрим величину



Для практических приложений часто удобно использовать следующее легко выводимое равенство:



Если параметры распределения неизвестны (т.е. гипотеза не простая) и подлежат оцениванию по данным выборки, а число параметров равно *k*, то на уклонения  накладывается тем самым еще *k* связей; поэтому число независимых между собой уклонений (число степеней свободы) в этом случае будет *m-k*-1.

Предположим, например, что мы проверяем гипотезу нормальности для некоторого наблюденного распределения. Заменяя неизвестные параметры центра рассеивания *μ* и дисперсии *σ*2 их эмпирическими оценками **и *s*2 соответственно, будем в качестве приближения к теоретической плотности рассматривать функцию

.

В этом случае в качестве оценки вероятности попадания в какой-нибудь интервал *Δj* естественно считать:



Если проверяемая гипотеза верна, то случайная величина



имеет распределение χ2.

Решающее правило: если , то гипотеза принимается, иначе отвергается.

Расчеты по проверке гипотезы целесообразно свести в приведенную ниже табл. 18.

Принято считать, что *ξj* и *nj* распределены практически нормально, если *Npj ≥* 10*.* Если есть интервалы со значениями *Npj* меньше 10, то следует объединить соседние группы.

Таблица 18

Таблица структурирующая проверку по критерию Пирсона

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *i* | *Xi* |  | *F(ti)* | *pj= F(ti)-F(ti-1)*  *i=1,2,…m* | *nj* | *nj2* |  | *j* |
| 0 | *X*0 | *t*0 | *F(t*0*)* | *p0* | - | - | - | - |
| 1 | *X*1 | *t*1 | *F(t*1*)* | *p1* | *n*1 |  |  | 1 |
| 2 | *X*2 | *t*2 | *F(t*2*)* | *p2* | *n*2 |  |  | 2 |
| 3 | *X*3 | *t*3 | *F(t*3*)* | *p3* | *n*3 |  |  | 3 |
| … | … | … | … | … | … |  |  | … |
| … | … | … | … | … | … |  |  | … |
| *m*-2 |  |  |  |  |  |  |  | *m*-2 |
| *m*-1 |  |  |  |  |  |  |  | *m*-1 |
| *m* |  |  |  |  |  |  |  | *m* |

Обозначения в таблице:

*N –* размер выборки,

*i* – номер границы участка,

*j* – номер участка,

*Xi*-значение границы участка,

 - выборочное среднее арифметическое,

*S* – среднее квадратичное отклонение,

*F(ti) –* Функция“теоретического” распределения,

*nj –* число выборочных значений в *j*-ом интервале.